Calogero-Moser系から見たPainleve方程式(Painleve系, 超幾何系, 漸近解析)

高崎, 金久

数理解析研究所講究録
1133巻 2000年 72-103

Calogero-Moser 系から見た Painlevé 方程式

京都大学総合人間学部基礎科学科　高崎金久 (Kanehisa Takasaki)

概要

Manin による Painlevé VI 型方程式の別表現は楕円型 Calogero-Moser 系の一種の楕円型 Inozemtsev 系を非自励系に変えた形をもつ．最近，各種の楕円型 Calogero-Moser 系から同様にして非自励系を構成できること，得られる非自励系はもとの自励系と同様の Lax 表示をもつこと，そこからトーラス上の等モノドロミー変形としての解釈が導かれること，などが明らかになった．特に，これによって Manin の非自励系をトーラス上の等モノドロミー系として特徴づけることができるようになった．この結果と背景について紹介する．他の Painlevé 方程式への退化，Garnier 系などへの拡張の可能性など，関連する問題にも触れる．

1　はじめに

今世紀初頭，R. Fuchs は，Painlevé VI 型方程式の等モノドロミー変形としての解釈を与えるとともに，不完全楕円積分によってこの方程式の別表現が得られることも指摘した [1]．Fuchs の与えたこの別表現からいわゆる「Picard の解」の存在がただちに導かれるが，それ以上の意味は長い間明らかにされなかった．９０年代に入って，Manin は（明らかに Painlevé VI 型方程式のアフィン Weyl 群対称性に関する岡本の８０年代の仕事 [2] を一つの重要な動機として）Fuchs のこの指摘をさらに発展させ，最終的に，楕円函数を非線形項にもつ２階微分方程式（実際には楕円函数型ポテンシャルをもつ非自励 Hamilton 系）としての表現に到達した [3]．

Manin のこの仕事は Painlevé 方程式と可積分系（あるいは等スペクトル変形）との新たなつながりを示すもので極めて興味深い．実際，Manin も間接的に指摘しているように，Manin の非自励系は楕円型 Calogero-Moser 系と総称される一群の有限次元可積分系

とよく似ているからである．この可積分系の特徴は，トーラス上に定義された（すなわちトーラス上を走るスペクトルパラメータ ζ をもつ）Lax 対 $L(\zeta), M(\zeta)$ によって Lax 表示が与えられる，ということにある．

Painlevé VI 型方程式から楕円型 Calogero-Moser 系と（少なくとも形の上で）似たものが現れることはかなり意外な事実である．Painlevé 方程式を含む既知の多くの等モノドロミー変形は Riemann 球面上の常微分方程式に基づく．Fuchs の仕事から１０年余り後に Garnier が示したように [4]，これらの等モノドロミー変形の方程式（Garnier は Schlesinger 系を扱った）から一種の極限操作で Lax 表示をもつ可積分系が得られるが，この Lax 表示も Riemann 球面上のスペクトルパラメータをもつ Lax 対で与えられる．いずれの場合も，トーラス上のスペクトルパラメータが現れる余地はないように見える．

Levin と Olshanetsky はこの意外な関連を「Painlevé-Calogero 対応」と呼んで，背後の意味を探ることを試みた [5]．その基礎にあったのは，Painlevé VI 型方程式の４つのパラメータが特別な関係にある場合には，標準的な楕円型 Calogero-Moser 系（A_1型）を介して Manin の非自励系をトーラス上の等モノドロミー変形として定式化できる，という事実である．Levin と Olshanetsky はこのようなトーラス（あるいはより一般的な閉 Riemann 面）上の等モノドロミー変形を Hitchin 系という幾何学的な舞台の上で非常に一般的に論じている．しかしながら，肝心の Painlevé VI 方程式のパラメータが任意の値をとる場合の取り扱いは残されたままであった．

最近筆者は，Levin と Olshanetsky とは少し異なる枠組みを用いることで，４つのパラメータが任意の値をとる場合にも Manin の非自励系をトーラス上の等モノドロミー変形として特徴づけられる，ということを示した [6]．ここで用いるのは楕円型 Calogero-Moser 系に対する「ルート型 Lax 対」という新しい Lax 表示である．Manin の非自励系は楕円型 Inozemtsev 系と呼ばれる楕円型 Calogero-Moser 系の一種を非自励系に焼き直したものである．Inozemtsev 系は，他の楕円型 Calogero-Moser 系と違って，単純 Lie 代数に対応しないルート系（BC 型ルート系）で特徴づけられる．「ルート型 Lax 対」はそのような場合も扱える枠組みを提供するのである．

以下では，この結果の紹介を目標に，背景となるさまざまな概念を解説し，いくつかの関連する問題にも触れる．

2 Painlevé → Fuchs → Manin

Painlevé VI 型方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda^2}{dt^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{\lambda-t}\right)\frac{d\lambda}{dt}\\ &\quad+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left(\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}+\delta\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right)\end{aligned} \tag{1}$$

という有理函数型の非線形性をもつ 2 階微分方程式である．Fuchs と Manin は従属変数と独立変数の巧妙な変数変換によってこの方程式を書き換えた．以下ではこの書き換えの手順を紹介する．

2.1 Painlevé → Fuchs

Fuchs は (1) が

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t\int_\infty^\lambda\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}} &= \frac{\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}}{t(1-t)}\cdot\\ &\quad\cdot\left[\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{(t-1)}{(\lambda-1)^2}+\left(\delta-\frac{1}{2}\right)\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right]\end{aligned} \tag{2}$$

という形に書き換えられることを注意した．ここで $\mathcal{L}_t$ は

$$\mathcal{L}_t=t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}+(1-2t)\frac{d}{dt}-\frac{1}{4} \tag{3}$$

という 2 階線形微分作用素である．これはもともと完全楕円積分（つまり後で述べるような楕円曲線上の周期積分）に対する Picard-Fuchs 方程式

$$\mathcal{L}_t\oint_\gamma\frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}}=0 \tag{4}$$

に現れるものである．その意味で Painlevé VI 型方程式は Picard-Fuchs 方程式の非線形・非斉次の拡張とみなすことができる．Picard の解の存在はこの方程式 (2) からもわかるが [2]，Manin の方程式で見る方がわかりやすい．

2.2 楕円函数による書き換え

ここでは λ の代わりに上の不完全楕円積分で定義される函数を従属変数にして Fuchs の方程式 (2) を書き換える．(正確には，あとで示すような余分の乗法因子を付ける)．

まず上の不完全楕円積分に付随する楕円曲線

$$y^2 = z(z-1)(z-t) \tag{5}$$

のパラメータ表示を求める．基本周期 $1, \tau$ の Weierstrass $\wp$-函数

$$\wp(u) = \wp(u \mid 1, \tau) = \frac{1}{u^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(u+m+n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} \right), \tag{6}$$

を用いると，この楕円曲線は

$$z = \frac{\wp(u) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad y = \frac{\wp(u)}{2(e_3 - e_1)^{3/2}} \tag{7}$$

というようにパラメータ表示される．$e_1, \cdots, e_3$ は半周期

$$\omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \quad \omega_3 = \frac{\tau}{2} \tag{8}$$

における $\wp(u)$ の値 $e_a = \wp(\omega_a)$ $(a = 1, 2, 3)$ である．u-平面の原点と３つの半周期が次のように上の楕円曲線の分岐点に対応していることに注意されたい：

$$\begin{aligned} u = 0 &\longleftrightarrow z = \infty \\ u = \omega_1 &\longleftrightarrow z = 0 \\ u = \omega_2 &\longleftrightarrow z = 1 \\ u = \omega_3 &\longleftrightarrow z = t \end{aligned} \tag{9}$$

このパラメータ表示と Fuchs の不完全楕円積分との関係を見るため，パラメータ表示から従う微分の関係

$$du = \frac{1}{2(e_2 - e_1)^{1/2}} \frac{dz}{y} \tag{10}$$

に注目する．これを積分すれば

$$u = \frac{1}{2(e_2 - e_1)^{1/2}} \int_\infty^{z(u)} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}} \tag{11}$$

となる．特に $z = \lambda$ での u の値を q と呼べば，

$$q = \frac{1}{2(e_2 - e_1)^{1/2}} \int_\infty^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}} \tag{12}$$

であり，逆に λ は q の函数として

$$\lambda = \frac{\wp(q) - e_1}{e_2 - e_1} \tag{13}$$

と書ける．この q を新たな従属変数として Fuchs の方程式 (2) の方程式を書き直すのである．

(2) の左辺はすでに q で書けているから，右辺を調べる．まず，前述の楕円曲線のパラメータ表示を思い出せばわかるように，λ の3次式の平方根は y の $z=q$ での値に他ならないから

$$\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}=\frac{\wp'(q)}{2(e_2-e_1)^{1/2}} \tag{14}$$

である．また，2次分数式の各項は

$$\frac{t}{\lambda^2}=\frac{(e_3-e_1)(e_2-e_1)}{(\wp(q)-e_1)^2},\ \text{etc.} \tag{15}$$

というように $\wp(q)$ の2次分数式に書ける．さらに，$\wp$-函数の満たす函数等式

$$\wp(u+\omega_j)=\frac{(e_j-e_k)(e_j-e_\ell)}{\wp(u)-e_j}\quad (j,k,\ell \text{ は } 1,2,3 \text{ の巡回置換}) \tag{16}$$

を u について微分したものを用いれば，$\wp(q)$ の2次分数式の部分を $\wp'(q+\omega_j)$ の1次結合としてあらわすことができる．

最後に右辺から左辺へいくつかの項を移動すると，Fuchs の方程式 (2) は q を従属変数とする微分方程式

$$\begin{aligned}&4(e_2-e_1)^{1/2}t(t-1)\mathcal{L}_t[(e_2-e_1)^{1/2}q]\\ =\ &\alpha\wp'(q)-\beta\wp'(q+\omega_1)+\gamma\wp'(q+\omega_2)-(\delta-\frac{1}{2})\wp'(q+\omega_3)\end{aligned} \tag{17}$$

に変わる．Manin の方程式まではあと一歩（数歩？）である．

2.3 Fuchs → Manin

Manin の方程式を導くには独立変数を t から τ に変える．t と τ は

$$t=\frac{e_3-e_1}{e_2-e_1} \tag{18}$$

という関数関係で結ばれていることに注意する．$\mathcal{L}_t$ の与える Picard-Fuchs 方程式の解の基底は2つの独立な完全楕円積分であるが，今の場合，$(e_2-e_1)^{1/2}$ と $(e_2-e_1)^{1/2}\tau$ がそのようなような基底を与える．このことから

$$\mathcal{L}_t=t(1-t)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2(e_2-e_1)^{1/2}\circ\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2\circ(e_2-e_1)^{-1/2} \tag{19}$$

となることがすぐにわかる．ここでさらに $d\tau/dt$ の具体的な表示

$$\frac{d\tau}{dt}=\frac{\pi i}{t(t-1)(e_2-e_1)} \tag{20}$$

(これを導くには少し面倒な議論が必要である [3]) を用いれば，最終的に

$$(2\pi i)^2\frac{d^2q}{d\tau^2}=\sum_{a=0}^{3}\alpha_a\wp'(q+\omega_a) \tag{21}$$

という方程式が得られる．ただし $\omega_0=0$ である．これが Manin の見出した方程式である．右辺のパラメータは Painlevé VI 型方程式のパラメータと

$$\alpha_0=\alpha,\quad \alpha_1=-\beta,\quad \alpha_2=\gamma,\quad \alpha_3=\frac{1}{2}-\delta \tag{22}$$

という関係にある．

このように，従属変数と独立変数の両方の変換 $(\lambda,t)\to(q,\tau)$ によって Painlevé VI 型方程式は Manin の方程式に変換される．Manin の方程式で見れば Picard の解とは「直線」解

$$q=c_1+c_3\tau\quad (c_1,c_3=\mathrm{constant}) \tag{23}$$

に他ならない．これを q と λ を結ぶ式 (13) に代入して本来の Picard の解が得られることになる．

3 Hamilton 系としての対応

Painlevé VI 型方程式も Manin の方程式も Hamilton 形式に書ける．前節で復習した Manin の方程式の導出は 2 階の微分方程式を直接に変数変換するものであったが，これを Hamilton 系の正準変換と見ることもできる．Painlevé VI 型方程式のアフィン Weyl 群対称性が Hamilton 形式に基づいて導かれるものであること [2] を考えると，Hamiton 形式のレベルでの対応を確かめておくことも重要であろう．

3.1 2 つの方程式の Hamilton 形式

岡本 [7] が示したように，Painlvé VI 型方程式 (1) は

$$H=\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\left[\mu^2-\left(\frac{\kappa_0}{\lambda}+\frac{\kappa_1}{\lambda-1}+\frac{\theta-1}{\lambda-t}\right)\mu+\frac{\kappa}{\lambda(\lambda-1)}\right] \tag{24}$$

という Hamiltonian によって Hamilton 系

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{25}$$

に書き直せる．ここで $\kappa_0, \kappa_1, \theta, \kappa_\infty$ は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ と

$$\kappa_0^2 = -2\beta, \quad \kappa_1^2 = 2\gamma, \quad \theta^2 = 1 - 2\delta, \quad \kappa_\infty^2 = 2\alpha, \tag{26}$$

という関係で結ばれるパラメータで，(1) を Riemann 球面上の常微分方程式の等モノドロミー変形の方程式と解釈するときに確定特異点 $0, 1, t, \infty$ での特性指数として現れる．κ は

$$\kappa = \frac{1}{4}(\kappa_0 + \kappa_1 + \theta - 1)^2 - \frac{1}{4}\kappa_\infty^2 \tag{27}$$

で与えられる．Hamiltonian の中に時間変数 t が現れるのでこの Hamilton 系は非自励系である．

Manin の方程式 (21) は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 - \sum_{a=0}^{3} \alpha_a \wp(q + \omega_a). \tag{28}$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$2\pi i \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad 2\pi i \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \tag{29}$$

に書き直せる．通常の Hamilton 方程式と違って左辺に $2\pi i$ という因子が現れていることに注意されたい．Manin はこの因子を Hamiltonian に押し込んでいるが，むしろこのように $d/d\tau$ の前に付ける方が自然である．実際，Lax 形式を論じるときにテータ函数の満たす「熱方程式」を用いるが，上の Hamilton 方程式の左辺の $2\pi i d/d\tau$ はこの熱方程式の左辺と対応しているとも言えるのである．とにかく，今の場合 τ が時間変数であり，$\wp$-函数はこの τ にも依存するので，この Hamilton 系も非自励系である．

3.2 正準変換の具体的な形

この二つの Hamilton 系が正準変換で結ばれる，というのが主張したいことである．正確には次のようになる：

命題　二つの Hamilton 系は

$$
\begin{aligned}
\lambda &= f(q), \\
\mu &= \frac{p}{f'(q)} + \frac{2\pi i(e_2 - e_1)^2}{\wp'(q)^2} f_\tau(q) \\
&\quad + \frac{e_2 - e_1}{2}\left(\frac{\kappa_0}{\wp(q) - e_1} + \frac{\kappa_1}{\wp(q) - e_2} + \frac{\theta - 1}{\wp(q) - e_3}\right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

という（時間に依存する）正準変換で結ばれる．ただしここで

$$
f(u) = \frac{\wp(u) - e_1}{e_2 - e_1}, \quad f'(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u}, \quad f_\tau(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial \tau} \tag{31}
$$

である．正確に言えば，λ, μ, p, q の間にこれらの関係を，また t, τ の間には (18) の関係を置くとき，

$$
\mu d\lambda - H dt = pdq - \mathcal{H}\frac{d\tau}{2\pi i} + \text{exact form} \tag{32}
$$

が満たされる．

注意　このような時間依存の正準変換は Painlevé 方程式および Garnier 系の Hamilton 構造の議論ではおなじみのものである [7]．時間依存であるから，Hamiltonian と時間も変数に含めた 4 次元のシンプレクティック形式が

$$
d\mu \wedge d\lambda - dH \wedge dt = dp \wedge dq - d\mathcal{H} \wedge \frac{d\tau}{2\pi i} \tag{33}
$$

というように保たれることになる．これが Hamilton 系の間の変換（あるいは Bäcklund 変換と言ってもよかろう）を与えることは，二つの Hamilton 系が外微分方程式としてそれぞれ

$$
d\mu \wedge d\lambda - dH \wedge dt = 0, \tag{34}
$$

$$
dp \wedge dq - d\mathcal{H} \wedge \frac{d\tau}{2\pi i} = 0 \tag{35}
$$

と書けることに注意すれば明らかであろう．

3.3　正準変換の由来

上の結果の証明には長く煩雑な計算を要するので，ここでは省略する．その代わりに，(30) の由来を簡単に説明しておく．

(30) の第一式は前節で示したものと同じであるから，説明を要しないだろう．

第二式は μ を p, q と結ぶ式であるが，実はこれは λ に対する Hamilton 方程式を読み替えたものである．実際，この Hamilton 方程式は

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t(t-1)}\left[2\mu - \left(\frac{\kappa_0}{\lambda} + \frac{\kappa_1}{\lambda-1} + \frac{\theta-1}{\lambda-t}\right)\right] \tag{36}$$

となるので，μ について解くと

$$\mu = \frac{t(t-1)}{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{\kappa_0}{\lambda} + \frac{\kappa_1}{\lambda-1} + \frac{\theta-1}{\lambda-t}\right) \tag{37}$$

となるが，この右辺を $\lambda = f(q)$ によって書き直せば，上に示した μ を p, q と結ぶ式になる．

もう少し立ち入って説明する．$\lambda = f(q)$ を正直に微分すれば

$$\frac{d\lambda}{dt} = f'(q)\frac{dq}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} + f_\tau(q)\frac{d\tau}{dt} \tag{38}$$

となる．$d\tau/dt$ にはすでに触れた公式 (20) を適用する．λ の有理式の部分は

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{e_2-e_1}{\wp(q)}, \quad \frac{1}{\lambda-1} = \frac{e_2-e_1}{\wp(q)-e_2}, \quad \frac{1}{\lambda-t} = \frac{e_2-e_1}{\wp(q)-e_3} \tag{39}$$

となる．こうして最終的に (30) に到達する．

注意　もちろん，この議論では λ, μ の Hamilton 方程式が p, q に関するどのような Hamilton 系に変わるか，すぐにはわからない．$\mu d\lambda - Hdt$ を延々と計算して，最終的に exact form を法として $pdq - \mathcal{H}d\tau/2\pi i$ の形になることを確かめなければならない．この計算があまり易しくないのは，$f_\tau(u)$ のような τ に関する導函数が介在するためである（Manin の原論文にも同様の計算がある）．以下はこのことに関する技術的注意である：

1. $f_\tau(u)$ はテータ函数

$$\vartheta(u) = \vartheta_3(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp[\pi i\tau n^2 + 2\pi i n u] \tag{40}$$

との間で成り立つ関係式

$$\frac{f_\tau(u)}{f'(u)} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\vartheta'(u+\frac{1}{2})}{\vartheta(u+\frac{1}{2})} \tag{41}$$

（この式は両辺の函数の u-平面上の解析的性質を比較することで確かめられる）を用いれば $f(u), \vartheta(u), \vartheta'(u)$ など素性の知れた量に書き直せる．

2. 実際には，さらに上の関係式を τ で微分した量も現れるが，それもテータ函数の満たす熱方程式

$$4\pi i \frac{\partial \vartheta(u)}{\partial \tau} = \vartheta''(u) \tag{42}$$

を用いてやはり u についての導関数に書き直せる．

4 楕円型 Calogero-Moser 系

この節では Calogero-Moser 系について概説し[1]，その一種で Manin の方程式とよく似た構造をもつ楕円型 Inozemtsev 系を紹介する．また，あとでトーラス上の等モノドロミー変形を論じる際に Lax 表示が重要な役割を演じるので，楕円型 Calogero-Moser 系の Lax 表示について具体的な例を示して説明する．

4.1 Calogero-Moser 系とは？

Calogero-Moser 系 [9] とは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + V(q_1, \cdots, q_N) \tag{43}$$

という Hamiltonian をもつ Hamilton 系

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \tag{44}$$

で，２体間に

$$V_2(u) = \frac{1}{u^2}, \ \frac{1}{\sin^2(u)}, \ \frac{1}{\sinh^2(u)}, \ \wp(u) \tag{45}$$

という形のポテンシャルによる相互作用が働いているものである．実際には１体のポテンシャル（上の２体ポテンシャルと同じかあるいは調和ポテンシャル u^2 の形をとる）を含む場合もある．$1/\sin^2(u)$ の場合には特に Calogero-Sutherland 系と呼ぶことも多い．さらに粒子以外にスピン（単純 Lie 代数の表現）の自由度をもつ拡張もある．Calogero-Moser 系は，

[1] Calogero-Moser 系の古典論・量子論両面にわたる解説として Olshanetsky と Perelomov のレヴュー [8] がある．基礎的な部分は概ねこれで知ることができる．９０年代のさまざまな進展については別の適当な資料に当たらなければならない．

ポテンシャルに現れる函数の種類に応じて，有理型（rational）・三角型（trigonometric）・楕円型（elliptic）と大別される．

Calogero-Moser 系の中でも特に重要なのは可積分な場合である（普通 Calogero-Moser 系と言えば可積分な場合を意味する）．ここでいう「可積分性」は「Liouville 可積分性」，すなわち相空間の次元の半分の個数（上の形の Hamiltonian では N 個）の函数的に独立（つまり $dF_1 \wedge \cdots dF_N \neq 0$）かつ包合的な（つまり $\{F_j, F_k\} = 0$ となる）大域的第一積分 $F_1, \cdots, F_N$ をもつことを意味する．古典力学系として可積分な Calogero-Moser 系は量子論的にも可積分であることが多い（例外は知らない）が，ここではその話題には立ち入らない．

可積分性は Hamiltonian のポテンシャル（前述のような１体・２体ポテンシャルの１次結合として与えられる）の形に強い制約を課する．今日までに見出された可積分な Calogero-Moser 系はいずれもルート系や単純 Lie 代数などに付随して決まる構造をもつ．ルート系に付随する例をいくつか紹介しておく．

例：$A_{\ell-1}$ 型 Calogero-Moser 系　最も基本的（古典的）な例はいわゆる $A_{\ell-1}$ 型の系で，その Hamiltonian は前述の函数 $V_2(u)$ によって

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell} p_j^2 + \frac{g^2}{2}\sum_{j\neq k} V_2(q_j - q_k) \tag{46}$$

とあらわされる（g はいわゆる結合定数）．重心運動は分離できるので，座標系を重心枠

$$\sum_{j=1}^{\ell} q_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{\ell} p_j = 0 \tag{47}$$

に制限してもよい．ポテンシャル中の $q_j - q_k$ という座標の組み合わせは $A_{\ell-1}$ ルート系

$$\Delta_{A_{\ell-1}} = \{e_j - e_k \mid j \neq k\} \subset \mathbb{R}^\ell \tag{48}$$

（e_j は $\mathbb{R}^\ell$ の標準基底）の構造を反映している．

例：A-D-E 系列　上の $A_{\ell-1}$ 型の系の素直な拡張として，任意の simply laced な（つまり A-D-E 系列の）ルート系 $\Delta \subset \mathbb{R}^\ell$ に対して可積分な Calogero-Moser 系がある．これは $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ を相空間として Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p \cdot p + \frac{g^2}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} V_2(\alpha \cdot q) \tag{49}$$

で定義される系である．

例：楕円型 Inozemtsev 系　楕円型 Inozemtsev 系は

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell}p_j^2+\frac{g_M^2}{2}\sum_{\epsilon,\epsilon'=\pm1}\sum_{j\neq k}\wp(\epsilon q_j+\epsilon' q_k)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{a=0}^{3}g_a^2\wp(q_j+\omega_a) \tag{50}$$

という Hamiltonian で定義される [10]．ここで $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ は前と同様に３つの半周期であり，また $\omega_0=0$ である．Bordner と佐々木は後で紹介する一連の仕事の中でこの系の Lax 対を構成している．その中で注意されたように，１体のポテンシャルの部分は $\wp(q_j)$, $\wp(2q_j)$, $\wp^{(2)}(q_j)$, $\wp^{(1/2)}(q_j)$ の１次結合としてあらわせる．ただし $\wp^{(2)},\wp^{(1/2)}$ は基本周期の一方を２倍または半分にした $\wp$-函数

$$\wp^{(2)}(u)=\wp(u\mid 2,\tau),\quad \wp^{(1/2)}(u)=\wp(u\mid \frac{1}{2},\tau) \tag{51}$$

である．そのことから，この系を BC_ℓ 型ルート系

$$\begin{aligned}\Delta_{BC_\ell}=\Delta_M\cup\Delta_L\cup\Delta_S,\qquad &\Delta_M=\{\pm e_j\pm e_k\mid j,k=1,\cdots,\ell\},\\ \Delta_L=\{\pm 2e_j\mid 1\le j\le\ell\},\qquad &\Delta_S=\{\pm e_j\mid 1\le j\le\ell\}\end{aligned} \tag{52}$$

に付随する系とみなせることがわかる．(もともと Inozemtsev は BC 型ルート系に付随する Calogero-Moser 系 [8] の拡張としてこういうものを導入した.) この系は我々にとって特に興味深い対象である．実際，$\ell=1$ の場合にはポテンシャルの g_M を結合定数とする部分は存在せず，得られるものは Manin の Hamiltonian に他ならない！

ちなみに，パラメータを特別な値に選べば，Inozemtsev 系から他の型の楕円型 Calogero-Moser 系が現れる．B_ℓ,C_ℓ,D_ℓ 型の系が出てくるのはほぼ明らかであろう．$\ell=1$ の場合には Manin の Hamiltonian になる．さらに Manin の Hamiltonian で結合定数がすべて等しい（つまり $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$ となる）場合には，$\wp$-函数の満たす等式

$$\frac{1}{4}\wp(u)+\frac{1}{4}\wp(u+\omega_1)+\frac{1}{4}\wp(u+\omega_2)+\frac{1}{4}\wp(u+\omega_3)=\wp(2u) \tag{53}$$

によって実は A_1 型の系と同一視できる．Levin と Olshanetsky[5] が注目したのはこの場合である．

ルート系の代わりに Lie 代数を基礎にして Calogero-Moser 系の拡張を考えれば，さまざまなスピン拡張（スピン自由度をもつ拡張）が得られる．実は Levin と Olshanetsky[5] がおもに議論したのは本来の Calogero-Moser 系よりもむしろスピン拡張の方である．Hitchin 系に基づく枠組みは巨大なもので，任意の閉 Riemann 面上に等モノドロミー変形を構成

することができる．しかし，Manin の方程式をこの枠組みで理解しようとすれば，方程式が A_1 型に帰着するような特別なパラメータ値に議論を制限せざるを得なかった．あとで紹介するルート型 Lax 対を用いればこの制限をはずすことができる．ここではスピン拡張についてこれ以上立ち入らない．

Calogero-Moser 系の可積分性の証明には大別して二通りの方法がある．一つは，むしろ最初に量子系で用いられた方法で，ある種の補助函数（実は Lax 方程式の構成にも現れる）を利用して直接に第一積分を構成するものである．もう一つは Lax 方程式としての表示（Lax 表示）を構成して，そこから第一積分の存在を導く方法である．Lax 表示を利用する方法は，量子系でも使えないことはないが，もともとは古典系に適している（しかも古典系の解法と直結している）．さらに等モノドロミー変形との関連を見るためには Lax 表示が欠かせない．

4.2 楕円型 Calogero-Moser 系の Lax 表示

以下では，楕円型 Calogero-Moser 系に話を絞って，Lax 表示について説明する．

4.2.1 $A_{\ell-1}$ 型の場合

例として $A_{\ell-1}$ 型の場合を考える．Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\ell} p_j^2 + \frac{g^2}{2}\sum_{j\neq k} \wp(q_j - q_k) \tag{54}$$

である．この場合の Lax 表示を与える行列対（Lax 対）として以前から知られている [11] のは次のような $\ell\times\ell$ 行列である：

$$\begin{aligned} L(\zeta) &= \sum_j p_j E_{jj} + ig\sum_{j\neq k} x(q_j - q_k, \zeta)E_{jk}, \\ M(\zeta) &= \sum_j D_j E_{jj} + ig\sum_{j\neq k} y(q_j - q_k, \zeta)E_{jk}. \end{aligned} \tag{55}$$

ここで E_{jk} は (j,k) 要素のみが 1 の行列であり，D_j は

$$D_j = ig\sum_{k(\neq j)} \wp(q_j - q_k) \tag{56}$$

である．また，$y(u,\zeta)$ は $x(u,\zeta)$ の第 1 変数についての導関数

$$y(u,\zeta) = \frac{\partial x(u,\zeta)}{\partial u} \tag{57}$$

であり，$x(u,\zeta)$ は $y(u,\zeta)$ とともに函数方程式

$$
\begin{aligned}
&x(u,z)y(v,z)-y(u,z)x(v,z)=x(u+v,z)(\wp(u)-\wp(v)),\\
&x(u,z)y(-u,z)-y(u,z)x(-u,z)=\wp'(u),\\
&x(u,z)x(-u,z)=\wp(z)-\wp(u).
\end{aligned}
\tag{58}
$$

を満たす函数である．このような函数として Weierstrass の σ-函数から構成されたもの

$$
x(u,z)=\frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\sigma(u)}
\tag{59}
$$

が用いられることが多いが，あとで等モノドロミー系を議論するときにこれと少し違うものが必要になる．今の段階では $x(u,\zeta)$ の具体的な表示はそれほど重要ではない．実際，この函数方程式を使うだけで，$\mathcal{H}$ の定める Hamilton 方程式

$$
\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j}
\tag{60}
$$

から Lax 方程式

$$
\frac{dL(\zeta)}{dt}=[L(\zeta),M(\zeta)]
\tag{61}
$$

が従うことが容易に確かめられる．

よく知られているように，上のような Lax 方程式は行列 $L(\zeta)$ の等スペクトル変形を定める．いいかえれば，$L(\zeta)$ の固有多項式 $\det(\lambda I-L(\zeta))$ は時間に依らず一定

$$
\frac{d}{dt}\det(\lambda I-L(\zeta))=0
\tag{62}
$$

である．特に，$\operatorname{Tr}L(\zeta)^k/k$ は保存量で，その $\zeta=0$ での Laurent 展開の係数から第一積分が得られる．たとえば $k=2$ のときには

$$
\frac{1}{2}\operatorname{Tr}L(\zeta)^2=2\mathcal{H}+(\zeta\ \text{のみの函数})
\tag{63}
$$

となって，Hamiltonian 自体が第一積分として得られる．これは運動量 p_j について 2 次多項式の第一積分だが，高次の $\operatorname{Tr}L(\zeta)^k$ からは運動量について k 次多項式であるような第一積分が得られる．従ってそれらの函数独立性は明らかであるが，包合性を確かめるには別の論法（たとえば r-行列を用いる方法）が必要である（それについては立ち入らない）．

4.2.2 Lax 表示に対する最近の２つの試み

他の型のルート系に付随する楕円型 Calogero-Moser 系の Lax 表示もさまざまな形で構成されているが，我々にとって特に重要なのは，上の $L(\zeta)$ のように，スペクトルパラメータ（ここでは ζ）を含む Lax 表示である．実際，後の節で議論するように，それから等モノドロミー変形を記述する Lax 方程式が得られるからである．

最近，そのような Lax 表示を系統的に構成する二つのアプローチが現れた．

一つは D'Hoker と Phong によるもので [12]，単純 Lie 代数の適当な表現空間上に Lax 対を構成する．ちなみに，上の $A_{\ell-1}$ 型の場合の Lax 表示は $SU(\ell)$ の Lie 代数のベクトル表現に実現されているとみなせる．D'Hoker と Phong の仕事の重要な帰結の一つは，simply laced でないルート系（正確には対応する単純 Lie 代数）の場合にはこれまで知られていた Calogero-Moser 系とは異なる「twisted model」が存在し，力学変数と結合定数の適当なスケール極限で，ひねられたアフィン代数（twisted affine algebra）に付随する戸田格子系に移行する，ということである．

もう一つのアプローチは Bordner，Corrigan，佐々木達によるもので [13]，Weyl 群の適当な表現空間（典型的にはルート系またはその Weyl 群軌道を基底の添え字集合とするベクトル空間）に Lax 対を構成する．彼らはこのような Lax 対 — 「ルート型 Lax 対」— をルート系に付随するさまざまな Calogero-Moser 系に対して構成している．その過程で Bordner と佐々木は D'Hoker と Phong の twisted model をさらに拡張した「extended twisted model」を見出し，特に BC_ℓ 型ルート系に対する extended twisted model が前述の Inozemtsev 系と等価であることを示した．Manin の方程式をトーラス上の等モノドロミー変形として特徴付けるときにはこの結果を利用する．

4.2.3 ルート型 Lax 対の例

例：*A-D-E* 系列の場合　*A-D-D*-系列の系 (49) の場合，ルート系 Δ は単一の Weyl 群軌道をなす．対応するルート型 Lax 対は Δ を行と列の添字とする次のような $\Delta \times \Delta$ 行列である：

$$L(\zeta) = P + X_1(\zeta) + X_2(\zeta), \quad M(\zeta) = D + Y_1(\zeta) + Y_2(\zeta). \tag{64}$$

ここで P と D は

$$P_{\beta\gamma} = p \cdot \beta \delta_{\beta\gamma}, \quad D_{\beta\gamma} = D_\beta \delta_{\beta\gamma} \quad (\beta, \gamma \in \Delta) \tag{65}$$

という形の対角行列で，D の対角要素は

$$D_\beta = ig\wp(\beta \cdot q) + ig \sum_{\gamma\in\Delta,\beta\cdot\gamma=1} \wp(\gamma \cdot q) \tag{66}$$

である．$X_1(\zeta)$ その他は対角要素がゼロの行列で

$$\begin{aligned} X_1(\zeta) &= ig\sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha\cdot q, z)E(\alpha), \qquad X_2(\zeta) = 2ig\sum_{\alpha\in\Delta} x(\alpha\cdot q, 2z)E(2\alpha), \\ Y_1(\zeta) &= ig\sum_{\alpha\in\Delta} y(\alpha\cdot q, z)E(\alpha), \qquad Y_2(\zeta) = ig\sum_{\alpha\in\Delta} y(\alpha\cdot q, 2z)E(2\alpha) \end{aligned} \tag{67}$$

という形をもつ．$x(u,z)$ と $y(u,z)$ は前述の函数方程式を満たす函数であり，また $E(\alpha)$ と $E(2\alpha)$ は

$$E(\alpha)_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha,\beta-\gamma}, \quad E(2\alpha)_{\beta\gamma} = \delta_{2\alpha,\beta-\gamma} \quad (\beta,\gamma\in\Delta) \tag{68}$$

という $\Delta\times\Delta$ 行列である．

注意　$A_{\ell-1}$ 型の場合，このルート型の Lax 対は前述の $\ell\times\ell$ 行列の（すなわち $SU(\ell)$ のベクトル表現上に構成した）とは異なるもので，行列表示すれば $\ell(\ell-1)\times\ell(\ell-1)$ 行列になる．同様のことは他の型のルート系に付随する系についても言える．例外は C_ℓ 型で，ルート系を添字集合とするルート型 Lax 対は $Sp(2\ell)$ のベクトル表現で構成した Lax 対に一致する．

このように同じ Hamilton 系に複数の異なる Lax 表示が存在することはそれほど珍しいことではない．たとえば，有限（周期的あるいは非周期的）戸田格子の Lax 表示はもともと Lie 代数の生成元で書けているので，Lie 代数の任意の有限次元表現に同時に Lax 表示ができていることになる．スピン拡張された Calogero-Moser 系も同様に任意の有限次元表現に Lax 表示が存在する．

例：$\ell = 1$ Inozemtsev 系の場合　一般の場合はやや大がかりになるので，最も簡単な $\ell=1$，すなわち Manin の方程式と対応する場合について説明する．一般に BC_ℓ 型ルート系はルートの長さに応じて３つの Weyl 群軌道 $\Delta_M, \Delta_L, \Delta_S$ に分かれ，それぞれを添字集合として Lax 対がつくれる．$\ell=1$ の場合は例外で，$\Delta_M=\emptyset$ となる．その場合の Δ_L を添字集合とする Lax 対は次のような行列要素をもつ 2×2 行列である：

$$L(\zeta)_{11} \;=\; p,$$

$$\begin{aligned}
L(\zeta)_{12} &= ig_{L1}x(2q,\zeta)+ig_{L2}x^{(2)}(2q,\zeta)+2ig_{S1}x(q,2\zeta)+2ig_{S2}x^{(1/2)}(q,2\zeta),\\
L(\zeta)_{21} &= ig_{L1}x(-2q,\zeta)+ig_{L2}x^{(2)}(-2q,\zeta)+2ig_{S1}x(-q,2\zeta)+2ig_{S2}x^{(1/2)}(-q,2\zeta),\\
L(\zeta)_{22} &= -p,\\
M(\zeta)_{11} &= D,\\
M(\zeta)_{12} &= ig_{L1}y(2q,\zeta)+ig_{L2}y^{(2)}(2q,\zeta)+2ig_{S1}y(q,2\zeta)+ig_{S2}y^{(1/2)}(q,2\zeta),\\
M(\zeta)_{21} &= ig_{L1}y(-2q,\zeta)+ig_{L2}y^{(2)}(-2q,\zeta)+2ig_{S1}y(-q,2\zeta)+ig_{S2}y^{(1/2)}(-q,2\zeta),\\
M(\zeta)_{22} &= D
\end{aligned} \tag{69}$$

ここで $g_{L1}, g_{L2}, g_{S1}, g_{S2}$ は $\kappa_0, \kappa_1, \theta, \kappa_\infty$ に相当する定数で，本来の結合定数と一定の関数関係で結ばれている．D は

$$D = ig_{L1}\wp(2q)+ig_{L2}\wp^{(2)}(2q)+ig_{S1}\wp(q)+ig_{S2}\wp^{(1/2)}(q) \tag{70}$$

で与えられる．また $x^{(2)}(u,\zeta), x^{(1/2)}(u,\zeta)$ は$\wp^{(2)}(u), \wp^{(1/2)}(u)$ に関連して導入される補助函数，$y^{(2)}(u,\zeta), y^{(1/2)}(u,\zeta)$ はその u についての導函数で，一連の函数方程式を満たすことが要求されるが，詳しいことは原論文に譲る [13, 6]．比較のため A_1 型の場合の Lax 対（2×2）を書いておく：

$$\begin{aligned}
L(\zeta) &= \begin{pmatrix} p & igx(2q,\zeta) \\ igx(-2q,\zeta) & -p \end{pmatrix},\\
M(\zeta) &= \begin{pmatrix} D & igy(2q,\zeta) \\ igy(-2q,\zeta) & D \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{71}$$

ただしここでは重心枠 $q_1 = -q_2 = q$, $p_1 = -p_2 = p$ で考えており，D は

$$D = ig\wp(2q) \tag{72}$$

で与えられる．確かに，Hamiltonian で見るときと同様，後者は前者の特殊化になっている．

5 非自励系＝等モノドロミー変形

5.1 非自励系の Lax 表示

$\ell = 1$ の Inozemtsev 系と Manin の方程式を改めて見比べてみよう．すでに見たように，両者は共通の Hamilton 構造（すなわち正準変数と Hamiltonian）をもつが，明らかに非

自励系と自励系の違いがある：

- Inozemtsev 系は２階方程式

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \sum_{a=0}^{3} \alpha_a \wp'(q + \omega_a) \tag{73}$$

あるいは１階の Hamilton 系

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \tag{74}$$

で定義された自励系である．しかも

$$\frac{dL(\zeta)}{dt} = [L(\zeta), M(\zeta)] \tag{75}$$

という形の Lax 表示をもつ．τ はここでは定数である．

- Manin の方程式は２階方程式

$$(2\pi i)^2 \frac{d^2q}{d\tau^2} = \sum_{a=0}^{3} \alpha_a \wp'(q + \omega_a) \tag{76}$$

あるいは１階の Hamilton 系

$$2\pi i \frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad 2\pi i \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \tag{77}$$

で与えられる非自励系である．τ はここでは変数である．

ここで問題になるのは Manin の方程式に対する Lax 表示である．
次の結果は Manin 方程式以外にも拡張された形でこの問題に対する解答を与える．

命題 $x(u,\zeta)$ として (59) の代わりに

$$x(u,\zeta) = \frac{\vartheta_1(\zeta - u)\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(\zeta)\vartheta_1(u)}. \tag{78}$$

を選ぶ．ここで

$$\vartheta_1(u) = \vartheta_1(u \mid \tau) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left[\pi i\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\pi i\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(u + \frac{1}{2}\right)\right] \tag{79}$$

である．さらに $x^{(2)}(u,\zeta), x^{(1/2)}(u,\zeta)$ が現れる場合には

$$\begin{aligned} x^{(1/2)}(u,\zeta) &= 2x(2u,\zeta \mid 2\tau) = \frac{2\vartheta_1(\zeta-2u \mid 2\tau)\vartheta_1'(0 \mid 2\tau)}{\vartheta_1(\zeta \mid 2\tau)\vartheta_1(2u \mid 2\tau)}, \\ x^{(2)}(u,\zeta) &= \frac{1}{2}x(\frac{u}{2},\zeta \mid \frac{\tau}{2}) = \frac{\vartheta_1(\zeta-\frac{u}{2} \mid \frac{\tau}{2})\vartheta_1'(0 \mid \frac{\tau}{2})}{2\vartheta_1(\zeta \mid \frac{\tau}{2})\vartheta_1(\frac{u}{2} \mid \frac{\tau}{2})}. \end{aligned} \tag{80}$$

とする．このとき，形式的置き換え

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow 2\pi i \frac{d}{d\tau} \tag{81}$$

によって各種の楕円型 Calogero-Moser 系から得られる非自励系に対して，等モノドロミー的 Lax 方程式

$$2\pi i \frac{\partial L(\zeta)}{\partial \tau} + \frac{\partial M(\zeta)}{\partial \zeta} = [L(\zeta), M(\zeta)] \tag{82}$$

が成り立つ．ここで $L(\zeta), M(\zeta)$ はもとの楕円型 Calogero-Moser 系に対して前節で示したような Lax 対である．

証明の方針　証明は難しくないので，要点を示す．詳細については原論文 [6] を参照されたい．

1. (82) の右辺を考える．自励系の場合には

$$[L(\zeta), M(\zeta)] = \frac{dL(\zeta)}{dt} = \{L(\zeta), \mathcal{H}\} \tag{83}$$

という関係式がある．非自励系と自励系は共通の Hamilton 構造をもつので，この式の真ん中の部分を除いた等式は非自励系でも成立する．

2. (78) のように選んだ補助函数は同時に

$$\begin{aligned} 4\pi i \frac{\partial \theta_1(u)}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \theta_1(u)}{\partial u^2}, \\ 2\pi i \frac{\partial x^{(1/2)}(u,\zeta)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 x^{(1/2)}(u,\zeta)}{\partial u \partial \zeta} &= 0, \\ 2\pi i \frac{\partial x^{(2)}(u,\zeta)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 x^{(2)}(u,\zeta)}{\partial u \partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \tag{84}$$

という微分方程式を満たす．これは ϑ_1 が $\vartheta = \vartheta_3$ と同様の熱方程式

$$4\pi i \frac{\partial \vartheta_1(u)}{\partial \tau} = \vartheta_1''(u) \tag{85}$$

を満たすことによる．

3. (84) を用いて (82) の左辺を計算すると，$\partial M(\zeta)/\partial\zeta$ に由来する項が $L(\zeta)$ の中の $x(u,\zeta)$ などを τ で微分することにより生じる項とちょうど打ち消し合って，上で求めた (82) の右辺の Poisson 括弧表示と一致することがわかる．

5.2 等モノドロミー変形としての解釈

上で導いた方程式 (82) はトーラス

$$E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}) \tag{86}$$

上の常微分方程式の等モノドロミー変形として解釈できる．

このことを見るために，(82) が次の方程式系の Frobenius 可積分条件であることに注意する：

$$\frac{\partial Y(\zeta)}{\partial z} = L(\zeta)Y(\zeta), \quad 2\pi i\frac{\partial Y(\zeta)}{\partial \tau} + M(\zeta)Y(\zeta) = 0. \tag{87}$$

最初の方程式は E_τ 上の常微分方程式とみなせる．その次の方程式はそれを τ で変形する方程式である．これは確かに Riemann 球面上の常微分方程式の設定と同様である．

Riemann 球面の場合と異なるのは $L(\zeta), M(\zeta)$ がトーラス上で一価でないことである．実際，$L(\zeta)$ は周期方向のずらしに対して

$$L(\zeta+1) = L(\zeta), \quad L(\zeta+\tau) = e^{2\pi iQ}L(\zeta)e^{-2\pi iQ} \tag{88}$$

という共役変換を受ける．ここで Q は P と同様にして q からきまる対角行列である．(たとえば，$A_{\ell-1}$ 型の系に対する $\ell\times\ell$ 行列の Lax 対の場合には $Q = \mathrm{diag}(q_1,\cdots,q_\ell)$ となる.）$M(\zeta)$ も周期方向のずらしについて同様の（もう少し込み入った）変換

$$M(\zeta+1) = M(\zeta), \quad M(\zeta+\tau) = e^{2\pi iQ}(M(\zeta)+2\pi iL(\zeta))e^{-2\pi iQ} - 2\pi iP \tag{89}$$

を受ける．このことを幾何学的に言えば，ここで考えている常微分方程式はトーラス上の非自明なベクトル束の上に定義されていて，q はこのベクトル束のモジュライである，ということになる．ちなみにベクトル束の代わりに G-束を考えればちょうど Levin と Olshanetsky の舞台設定（すなわち Hitchin 系の世界）になる．

このことを考慮に入れて，モノドロミーとして次のように２種類のものを考える：

1. **局所的なモノドロミー**：$L(\zeta)$ はトーラスの周期を法として見れば一般に $u=\omega_a$ $(a=0,1,2,3)$ の４点に１位の極をもつ．半周期も極として現れるのはルート型 Lax

対の特徴である．実際，ルート型 Lax 対は $x(u,\zeta)$ などの $u=0$ で極をもつ函数以外に ζ を 2 倍した函数 $x(u,2\zeta)$ 等を含むからである．これらの点の周りの解析接続に関するモノドロミー変換

$$Y(\zeta e^{2\pi i}) = Y(\zeta)\Gamma_a \tag{90}$$

からモノドロミー行列 Γ_a が決まる．

2. **大域的なモノドロミー**：トーラスを $1,\tau$ 方向に一回りするときの（つまり α,β サイクルに沿った）モノドロミー変換

$$Y(\zeta+1) = Y(\zeta)\Gamma_\alpha, \quad Y(\zeta+\tau) = e^{2\pi i Q}Y(\zeta)\Gamma_\beta \tag{91}$$

によってモノドロミー行列 $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta$ が決まる．後者の式の右辺に $e^{2\pi i Q}$ が付いていることは前述のベクトル束構造を反映している．

このとき主張は次のようになる：

命題 (82) のもとでこれらのモノドロミー行列（の共役類）は τ によらず一定である．

このように，楕円型 Calogero-Moser 系を τ に関する非自励系に焼き直したものはトーラス上の常微分方程式の等モノドロミー変形を定めることがわかる．特に，Manin の方程式が最終的に（4 つのパラメータが任意の値をとる場合でも）トーラス上の等モノドロミー系として解釈できたことになる．

6 他の Painlevé 方程式への退化

Painlevé VI 型方程式から退化操作によって V 型以下の方程式が得られることはよく知られている [7]．Manin の方程式にもこの操作に対応するものがあるだろうか？以下ではこの問題を考える．

6.1 VI 型から V 型への退化の処方箋

本来の Painlevé 方程式を VI 型から V 型へ退化させるには，パラメータ ϵ を導入して独立変数と方程式のパラメータを

$$t = 1+\epsilon t_1, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \beta = \beta_1, \quad \gamma = -\frac{\delta_1}{\epsilon^2} + \frac{\gamma_1}{\epsilon}, \quad \delta = \frac{\delta_1}{\epsilon^2} \tag{92}$$

と書き直し，$\epsilon \to 0$ の極限をとるのであった．$t_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ は退化した方程式の時間変数とパラメータである．うるさく言えば λ も $\lambda = \lambda_1$ と書くべきであるが，λ はそのまま同じ記号で通すことにする．この操作によってVI型方程式(1)からV型方程式

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda^2}{dt_1^2}+\frac{1}{t_1}\frac{d\lambda}{dt_1} &= \left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ &+\frac{(\lambda-1)^2\lambda}{t_1^2}\left(\alpha_1+\frac{\beta_1}{\lambda^2}+\gamma_1\frac{t_1}{(\lambda-1)^2}+\delta_1\frac{(\lambda+1)t_1^2}{(\lambda-1)^3}\right) \qquad (93)\end{aligned}$$

が得られる．

6.2 Fuchsの方程式の行方

この退化操作に伴ってFuchsの方程式(2)がどのようなものに変わるかを調べてみよう．

1. まずPicard-Fuchs作用素 $\mathcal{L}_t$ に $t(1-t)$ を掛けておけば

$$\begin{aligned}t(1-t)\mathcal{L}_t &= (-\epsilon t_1+\cdots)\Big((-\epsilon t_1+\cdots)\frac{1}{\epsilon^2}\frac{d^2}{dt_1^2}-(1+\cdots)\frac{1}{\epsilon}\frac{d}{dt_1}-\frac{1}{4}\Big) \\ &= t_1^2\frac{d^2}{dt_1^2}+t_1\frac{d}{dt_1}+O(\epsilon) \qquad (94)\end{aligned}$$

となって $\epsilon \to 0$ への極限がとれる．

2. 右辺の $\alpha+\cdots$ の部分は

$$\begin{aligned}&\alpha+\beta\frac{t}{\lambda^2}+\gamma\frac{t-1}{(\lambda-1)^2}+(\delta-\frac{1}{2})\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \\ =\ & \alpha_1+\beta_1\frac{1+\epsilon t_1}{\lambda^2}+\frac{\gamma_1}{\epsilon}\frac{\epsilon t_1}{(\lambda-1)^2}-\frac{1}{2}\frac{(1+\epsilon t_1)\epsilon t_1}{(\lambda-1-\epsilon t_1)^2} \\ &+\frac{\delta_1}{\epsilon^2}\left(-\frac{\epsilon t_1}{(\lambda-1)^2}+\frac{(1+\epsilon t_1)\epsilon t_1}{(\lambda-1-\epsilon t_1)^2}\right) \\ =\ & \alpha_1+\frac{\beta_1}{\lambda^2}+\gamma_1\frac{t_1}{(\lambda-1)^2}+\delta_1\frac{(\lambda+1)t_1^2}{(\lambda-1)^3}+O(\epsilon) \qquad (95)\end{aligned}$$

となって，同じく極限が存在する．

3. λ の３次式の平方根の部分は

$$\sqrt{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)} \to (\lambda-1)\sqrt{\lambda} \quad (\epsilon \to 0) \qquad (96)$$

となる

4. 問題は不定積分の部分であるが，これも上の平方根と同様に考えれば

$$\int_{\infty}^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-t)}} \to \int_{\infty}^{\lambda} \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z}} \quad (\epsilon \to 0) \tag{97}$$

となる.

結局，Fuchs の方程式は $\epsilon \to 0$ の極限で

$$\left(t_1 \frac{d}{dt_1}\right)^2 \int_{\infty}^{\lambda} \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z}} = (\lambda-1)\sqrt{\lambda}\left(\alpha_1 + \frac{\beta_1}{\lambda^2} + \gamma_1 \frac{t_1}{(\lambda-1)^2} + \delta_1 \frac{(\lambda+1)t_1^2}{(\lambda-1)^3}\right) \tag{98}$$

となる．これが V 型方程式に対する Fuchs の方程式の対応物である.

6.3 新しい従属変数

VI 型の場合に習って，不定積分で定義される函数

$$q = \int_{\infty}^{\lambda} \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z}} \tag{99}$$

を新たな従属変数として方程式を書き直す．VI 型の場合には $2(e_2-e_1)^{1/2}$ という因子があったので，それを捨ててしまったかのように q を定義してよいのか，と心配になるかもしれないが，この因子は実際には上の極限移行で定数に化けてしまうので，あまり気にしなくてよい．そこに凝りたい人は上の q の定義を

$$q = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty}^{\lambda} \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z}} \tag{100}$$

と修正すればよい．これによって元の問題の基本周期の $1, \tau$ のうち 1 がそのまま生き残った形に正規化される．ここではそこまで凝らないで最初の方の定義で先へ進む.

上の積分は具体的に計算できる．たとえば $z = \zeta^2$ と変数変換すれば

$$\int_{\infty}^{\lambda} \frac{dz}{(z-1)\sqrt{z}} = \int_{\infty}^{\sqrt{\lambda}} \frac{2\zeta d\zeta}{(\zeta^2-1)\zeta} = \log\left(\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\right)\Bigg|_{\zeta=\infty}^{\zeta=\sqrt{\lambda}} = \log\left(\frac{\sqrt{\lambda}-1}{\sqrt{\lambda}+1}\right) \tag{101}$$

となる．これを $\sqrt{\lambda}$ について解けば

$$\sqrt{\lambda} = -\coth(q/2) \tag{102}$$

となる．こうして VI 型の場合の楕円函数は双曲線函数に退化したわけである.（前述のように $2\pi i$ を挿入しておけば三角関数になる.）

6.4 q に対する方程式

上の q の表示式を方程式 (98) に代入すれば q に対する微分方程式が得られる．右辺を展開して各項を計算すると，

$$\begin{aligned}
(\lambda-1)\sqrt{\lambda} &= -\frac{1}{\sinh -2(q/2)}\cdot\frac{\cosh(q/2)}{\sinh(q/2)} = -\frac{\cosh(q/2)}{\sinh^3(q/2)},\\
\frac{(\lambda-1)\sqrt{\lambda}}{\lambda^2} &= -\frac{\sinh^4(q/2)}{\cosh^4(q/4)}\cdot\frac{\cosh(q/2)}{\sinh^3(q/2)} = -\frac{\sinh(q/2)}{\cosh^3(q/2)},\\
\frac{(\lambda-1)\sqrt{\lambda}}{(\lambda-1)^2} &= -\sinh^4(q/2)\cdot\frac{\cosh(q/2)}{\sinh^3(q/2)} = -\frac{1}{2}\sinh(q),\\
\frac{(\lambda+1)\sqrt{\lambda}}{(\lambda-1)^2} &= -\frac{\lambda^{3/2}+\lambda^{1/2}}{(\lambda-1)^2} = -\sinh^4(q/2)\left(\frac{\cosh^3(q/2)}{\sinh^3(q/2)}+\frac{\cosh(q/2)}{\sinh(q/2)}\right)\\
&= -\sinh(q/2)\cosh^3(q/2)-\cosh(q/2)\sinh^3(q/2) \qquad (103)
\end{aligned}$$

となる．面白いことに（あるいは，もともと Manin の方程式の退化したものだから当然というべきか？）これらはいずれも q の双曲線函数の多項式ないし有理式を q で微分した形に書ける．結局，(98) は

$$\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right)^2 q = -\frac{\partial V(q)}{\partial q} \qquad (104)$$

という形に変わる．ここで $V(q)$

$$\begin{aligned}
V(q) &= -\frac{\alpha_1}{\sinh^2(q/2)}-\frac{\beta_1}{\cosh^2(q/2)}+\frac{1}{2}\gamma_1 t_1\cosh(q)\\
&\quad +\frac{1}{2}\delta_1 t_1^2\left(\cosh^4(q/2)+\sinh^4(q/2)\right) \qquad (105)
\end{aligned}$$

である．

この方程式はただちに $\mathcal{H}=\frac{1}{2}p^2+V(q)$ を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$t_1\frac{dq}{dt_1}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p},\quad t_1\frac{dp}{dt_1}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} \qquad (106)$$

に書き直せる．これが V 型方程式に対する Manin の方程式の対応物である．ここでは $\log t_1$ が時間の役割を演じることに注意されたい．

こうして，Painlevé V 型方程式に対する Manin の方程式の対応物は双曲線函数のポテンシャルをもつ非自励 Hamilton 系である，という結論を得る．実は Inozemtsev 系にも三角型のものが知られているが [10]，ここに現れた Hamiltonian はそれと対応する形（結合定数が時間に依存する量に置き換えられた）をもっている．

6.5 さらに退化するとどうなるか？

V 型の方程式から IV 型方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4t\lambda^2 + 2(t^2 - \alpha)\lambda + \frac{\beta}{\lambda} \tag{107}$$

や III 型方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) + \frac{\lambda^2}{4t^2}(\alpha + \gamma\lambda) + \frac{\beta}{4t} + \frac{\delta}{4\lambda} \tag{108}$$

が退化操作で導かれる．(実際には後者を III$'$ 型と呼んで普通の III 型方程式とは区別するようである [7]．その意味での III 型方程式は上の方程式を $t \to t^2$, $\lambda \to t\lambda$ という変数変換で書き直したものである．) これらについてもこれまで議論したものと同様の変数変換 $\lambda \to q$ が得られる．IV 型と III 型の場合の変数変換は以下に示すように非常に簡単なものである．

IV 型の場合　変数変換は

$$q = \int^{\lambda} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\lambda} \tag{109}$$

で定義される（単なる原始函数とみなして積分定数は捨てている）．逆函数は $\lambda = (q/2)^2$ である．もとの方程式で導函数を含む部分は

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} - \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{q}{2}\frac{d^2q}{dt^2} \tag{110}$$

というように一つにまとまる（実は VI 型や V 型ですでに導入した従属変数の変換も裏ではこういうことを行っている）．q についての方程式は

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^5 + 4t\left(\frac{q}{2}\right)^3 + 2(t^2 - \alpha)\left(\frac{q}{2}\right) + \beta\left(\frac{q}{2}\right)^{-3} \tag{111}$$

となる．この方程式は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{q}{2}\right)^6 - 2t\left(\frac{q}{2}\right)^4 - 2(t^2 - \alpha)\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \beta\left(\frac{q}{2}\right)^{-2} \tag{112}$$

を Hamitonian とする Hamilton 系

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} \tag{113}$$

である．この Hamiltonian は有理型の Inozemtsev 系 [10] に対応する形（ここでも結合定数の一部が時間依存するものに置き換えられている）をもっている．

III 型の場合　変数変換は

$$q = \int^{\lambda} \frac{dz}{z} = \log \lambda \tag{114}$$

で定義される（ここでも積分定数を捨てている）．逆函数は $\lambda = e^q$ である．もとの方程式で導函数を含む部分は

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \frac{1}{t}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{e^q}{t^2}\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 q \tag{115}$$

というようにまとまる．q についての方程式は

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^2 q = \frac{\alpha}{4}e^q + \frac{\beta}{4}te^{-q} + \frac{\gamma}{4}e^{2q} + \frac{\delta}{4}t^2e^{-2q} \tag{116}$$

となる．この方程式は

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\alpha}{4}e^q + \frac{\beta}{4}te^{-q} - \frac{\gamma}{8}e^{2q} + \frac{\delta}{8}t^2e^{-2q} \tag{117}$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$t\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad t\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \tag{118}$$

である．ここでは，V 型と同様，$\log t$ が本質的な時間変数である．この Hamiltonian は BC 型戸田格子の結合定数を時間に依存する量に置き換えた形をしている．

以上の議論をふりかれば，Fuchs-Manin の変数変換とは Painlevé 方程式を

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}p^2 + V(q) \tag{119}$$

という標準的な形の Hamiltonian をもつ Hamilton 系に書き直す手続きである，という結論になりそうである．

その意味では，II 型や I 型の方程式はすでにそのような形になっている．実際，II 型や I 型の方程式は

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = (\lambda \text{ の多項式}) \tag{120}$$

という形をしており，Hamiltonian も

$$H = \frac{\mu^2}{2} + (\mu \text{ の高々 1 次式}) \tag{121}$$

というほぼ標準的な形になっていて，これ以上書き換えようがない．強いて言えば μ の1次の部分を μ の再定義によって消すことが残っているが，これはすぐにできる．また，q を定義する式をIII型からの退化で求めてみれば

$$q = \int^{\lambda} dz = \lambda \tag{122}$$

となる．これも新たな変換は行われないことを示している．

7 まとめと展望

これまで説明してきたことの要点を列挙すると以下のようになる：

- Painlevé VI 型方程式は2段階の変数変換によって Manin の方程式に変わる．最初の段階は Fuchs によって見出された従属変数の変換で，それは不完全楕円積分あるいはその逆函数の楕円函数によって定義される．次の段階は独立変数の変換で，そこでは楕円函数のパラメータ τ を新たな独立変数（時間変数）に選ぶ．

- Hamilton 形式で見れば，この変数変換は Hamilton 系の間の時間依存な正準変換である．

- Manin の方程式は楕円型 Calogero-Moser 系の一種である楕円型 Inozemtsev 系（の最も簡単な場合）を非自励系に焼き直したものとみなせる．両者は同じ形の Hamiltonian をもつ．前者における時間変数は τ であるが，後者ではそれとは独立に時間変数 t があり，τ は定数である．

- 可積分な楕円型 Calogero-Moser 系にはさまざまな種類があるが，それらはいずれもルート系や単純 Lie 代数に関連する構造をもつ．Lax 表示もそれぞれに応じたものがある．Inozemtsev 系は BC 型ルート系に付随しており，ルート型 Lax 対が構成できる．

- Manin の方程式を Inozemtsev 系に焼き直す手順を逆にたどることによって，さまざまな楕円型 Calogero-Moser 系から τ を時間変数とする非自励系が得られる．もとの自励系の Lax 対をうまく選べば，これらの非自励系は同じ Lax 対によって Lax 表示できる．そこからトーラス上の等モノドロミー変形としての解釈が導かれる．

- Fuchs-Manin の変数変換を V 型以下の方程式に対して考えることもできる．これによって V,IV,III 型に対して Manin の方程式に相当する方程式が得られるが，それらは結合定数が時間に依存する三角型・有理型 Inozemtsev 系，あるいはやはり結合定数が時間に依存する戸田格子の一種である．II 型と I 型についてはもはや変数変換の余地はなく，それ自体が Manin の方程式に相当するものであると解釈すべきである．

最後に，これから進むべき方向について考えてみたい．

一つの重要な方向は，岡本の見出した Painlevé 方程式のアフィン Weyl 群対称性 [2] の意味を Manin の方程式の枠組みで問い直すことであろう．これは Manin も試みているが，満足の行く解答は与えられていない．Manin が示しているように，対称性の一部は τ のモジュラー変換や q の半周期平行移動で説明できるが，アフィン Weyl 群のアフィン変換の部分は依然として神秘的なまま残っている．

この対称性の問題とも深く関わるのが特殊解の問題である．Painlevé 方程式の特殊解としてよく研究されているのは有理解や超幾何函数解などのいわゆる「古典解」であるが，Manin の方程式を通じてそれとは異なる種類の特殊解 — Picard の解はその典型である — を探ることができるだろう．これについては Manin も論文最後で多少議論しているが，そこでは議論されていない解として，たとえば，Chazy 方程式に関連する解 [14] は Manin の方程式ではどのように見えるのだろうか？また，最近 Bobenko 達が曲面の微分幾何学の問題に Painlevé VI 型・V 型の方程式が現れることを指摘しているが [15]，これも Manin の方程式を通じて眺めてみると面白いかも知れない．

さらに,「Painlevé-Calogero 対応」のような関係がどこまで拡張できるかを探る，という方向もある．すぐに思いつく問題は

- 一般の（$\ell > 1$）Inozemtsev 系は Painlevé 方程式のような Riemann 球面上の等モノドロミー変形と対応するか？

- Garnier 系と正種数の Riemann 面（おそらく超楕円曲線の Riemann 面）上の等モノドロミー変形との関連はあるか？

などであろう．いずれの問題も，本格的に等モノドロミー変形を考える前に，Hamilton 系のレベルでの対応を調べて手応えを探るのがよさそうである．最初の問題について少し調べてみた限りでは，感触があまり良くない．文字通りの意味での「Painlevé-Calogero 対応」は Painlevé 方程式に限られるのかも知れない．二番目の Garnier 系に関する問題についてはもう少し立ち入って説明しておきたい．

Garnier 系は Painlevé VI 型方程式の多変数化の一種である [7]．Hamilton 系としての定式化では，正準変数として $\lambda_1, \cdots, \lambda_N, \mu_1, \cdots, \mu$，時間変数として $t_1, \cdots, t_N$ を用意して

$$
\begin{aligned}
H_j &= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\Lambda(t_j)T(\lambda_k)}{T'(t_j)\Lambda'(\lambda_k)(\lambda_k - t_j)} \cdot \\
&\quad \cdot \left[\mu_k^2 - \left(\frac{\kappa_0}{\lambda_k} + \frac{\kappa_1}{\lambda_k - 1} + \sum_{\ell=1}^{N} \frac{\theta_\ell - \delta_{\ell j}}{\lambda_k - t_\ell}\right)\mu_k + \frac{\kappa}{\lambda_k(\lambda_k - 1)}\right] \qquad (123)
\end{aligned}
$$

という Hamiltonian $H_1, \cdots, H_N$ を考える．ここで $T(z), \Lambda(z)$ は

$$
T(z) = z(z-1)\prod_{j=1}^{N}(z - t_j), \quad \Lambda(z) = \prod_{k=1}^{N}(z - \lambda_k) \qquad (124)
$$

という多項式である．$N = 1$ の場合は Painlevé VI 型方程式に他ならない．

$N > 1$ の場合の Garnier 系にも Fuchs-Manin の変数変換が拡張できるか，感触を探ってみよう．一つのもっともらしい可能性は楕円曲線の代わりに

$$
y^2 = T(z) \qquad (125)
$$

という超楕円曲線を用いることである．このとき従属変数の変換としては

$$
q_k = \frac{1}{N_k}\int_{\infty}^{\lambda_k} \frac{dz}{\sqrt{T(z)}}, \quad p_k = N_k\sqrt{T(\lambda_k)}\mu_k + \cdots \qquad (126)
$$

という形のものを考えるのが最も自然に思われる．ここで N_k は $2(e_2 - e_1)^{1/2}$ に相当する正規化係数であり，$\cdots$ の部分は t, λ だけからなる．

実はこうして得られるのは Calogero-Moser 系などとはかなり異質のものである．それを見るために，この変換によって Hamiltonian，特にその運動エネルギーの部分，に何が起こるかを調べてみる．H_j の定義式を見れば，この式の $[\mu_k^2 + \cdots]$ の部分は p_k, q_k で書き直す際にその前の $T(\lambda_k)$ という因子を吸収して $[p_k^2 + \cdots]$ という形になることがわかる．従って

$$
H_j = -\sum_{k=1}^{N} \frac{\Lambda(t_j)}{T'(t_j)\Lambda'(\lambda_k)(\lambda_k - t_j)}[p_k^2 + \cdots] \qquad (127)
$$

となる．$T'(t_j)$ という因子はおそらく独立変数 t_j 達の変換に吸収されるだろう．処理できずに残るのは

$$
\frac{\Lambda(t_j)}{\Lambda'(\lambda_k)(\lambda_k - t_j)} \qquad (128)
$$

という部分である．$N=1$ の場合にはこれが定数 -1 になるので，変換後の Hamiltonian は $\frac{1}{2}p^2+V(q)$ という形になる．$N>1$ の場合にはこの部分が残ってしまう．(もちろん，今考えているのは時間依存の正準変換なので，変換された系の Hamiltonian にはさらに付加項が加わるが，これは今注目している p_k^2 の部分には影響を与えない．) 要するに，変換された Hamiltonian は

$$\mathcal{H}_j=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}g_{kk}p_k^2+\cdots \tag{129}$$

という形をもつが，$N>1$ の場合には g_{kk} を定数にすることはできそうにないのである．

このように，上の変数変換では Calogero-Moser 系などとはかなり違うものが得られるようであるが，しかし，この系を適当に自励系に焼き直せば可積分な Hamilton 系が得られる，ということは間違いない．なぜなら，Garnier 系に戻れば（Garnier がそれと等価な Schlesinger 系で示したように [4]）そのような可積分な自励系化が存在することがわかっているからである．Garnier 系の自励系版として得られるこの可積分系は，２次曲面の測地流・特殊な剛体の運動・Neumann 系など，１９世紀に発見された可積分系の仲間である．これらの可積分系が包括的に等スペクトル変形として扱えることを見出したのは Moser なので [16]，これらの可積分系を「Moser 系」と総称することもある．その意味で，Garnier 系についてはすでに「Garnier-Moser 対応」がある．上で試みたやや荒削りな議論は，Garnier 系やそれに付随する Moser 系を何か別の形 — 望むらくは前述の超楕円曲線 $y^2=T(z)$ の上で定義される等モノドロミー変形や等スペクトル変形 — で記述する可能性を示唆しているように思われる．

参考文献

[1] R. Fuchs, Über lineare homogene Differentialgleichungern zweiter Ordnung mit im endlich gelegene wesentlich singulären Stellen, Math. Ann. **63** (1907), 301-321.

[2] K. Okamoto, Studies in the Painlevé equations, I: Sixth Painlevé equation, Annali Mat. Pura Appl. **146** (1987), 337-381.

[3] Yu. I. Manin, Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbb{P}^2$, AMS Transl. (2) **186** (1998), 131-151, `alg-geom/9605010`.

[4] R. Garnier, Garnier, R., Sur une classe de systèmes differentiels abéliens deduits de la théorie des équations linéaires, Rend. Circ. Mat. Palermo 43 (1918-19), 155-191.

[5] A.M. Levin and M.A. Olshanetsky, Painlevé-Calogero correspondence, `alg-geom/9706012`, AMS Transl. (2) **191** (1999) (to appear); Classical limit of the Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard equations as hierarchy of isomonodromic deformations, `hep-th/9709207`.

[6] K. Takasaki, Elliptic Calogero-Moser Systems and Isomonodromic Deformations, `math.QA/9905101`.

[7] K. Okamoto, Isomonodromic deformations and Painlevé equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **33** (1986), 575-618.

[8] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras, Physics Reports **71** (1981), 313-400; Quantum integrable systems related to Lie algebras, Physics Reports **94** (1983), 313-404.

[9] F. Calogero, Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, J. Math. Physics **12** (1971) 419-436.
B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one-dimension. II, Phys. Rev. **A5** (1972) 1372-1376.
J. Moser, Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations, Adv. Math. **16** (1975) 197-220.
J. Moser, Integrable systems of non-linear evolution equations, in *Dynamical Systems, Theory and Applications*, J. Moser, ed., Lecture Notes in Physics **38** (1975) (Springer-Verlag).
F.Calogero, C. Marchioro and O. Ragnisco, Exact solution of the classical and quantal one-dimensional many body problems with the two body potential $V_a(x) = g^2a^2/\sinh^2 ax$, Lett. Nuovo Cim. **13** (1975) 383-387.
F.Calogero, Exactly solvable one-dimensional many body problems, Lett. Nuovo Cim. **13** (1975) 411-416.

[10] V.I. Inozemtsev and D.V. Meshcheryakov, Extension of the class of integrable dynamical systems connected with semisimple Lie algebras, Lett. Math. Phys. **9** (1985),

13-18.

V.I. Inozemtsev, The finite Toda lattices, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 629-638.

[11] I.M. Krichever, Elliptic solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation and integrable systems of particles, Funct. Anal. Appl. **14** (1980), 282-290.

[12] E. D'Hoker and D.H. Phong, Calogero-Moser Lax pairs with spectral parameter, Nucl. Phys. **B530** (1998), 537-610, `hep-th/9804124`; Calogero-Moser and Toda systems for twisted and untwisted affine Lie algebras, Nucl. Phys. **B530** (1998), 611-640, `hep-th/9804125`.

[13] A.J. Bordner, E.Corrigan and R. Sasaki, Calogero-Moser models I: A new formulation, Prog. Theor. Phys. **100** (1998), 1107-1129, `hep-th/9805106`.
A.J. Bordner, R. Sasaki and K. Takasaki, ditto II: Symmetries and folidings, Prog. Theor. Phys. **101** (1999), 485-517, `hep-th/9809068`.
A.J. Bordner and R. Sasaki, ditto III: Elliptic potentials and twisting, Prog. Theor. Phys. **101** (1999), 799-829, `hep-th/9812232`.
S.P. Kastgir, R. Sasaki and K. Takasaki, ditto IV: Limit to Toda theory, Prog. Theor. Phys. **102** (1999) (to appear), `hep-th/9807102`. A.J. Bordner, E.Corrigan and R. Sasaki, Generalized Calogero-Moser models and universal Lax pair operators, Prog. Theor. Phys. **102** (1999), 499-529, `hep-th/9905011`.

[14] B. Dubrovin, Geometry of 2D topological field theories, Lecture Notes in Math. **1620** (1996), pp. 120-348.
M. Mazzocco, Picard and Chazy solutions to the Pailevé VI equation, `math.AG/9901054`.

[15] A.I. Bobenko and U. Eitner, Bonnet surfaces and Painlevé equations, J. reine angew. Math. 499 (1998), 47-79.

[16] J. Moser, Geometry of quadrics and spectral theory, in *Chern Symposium, Berkeley, 1979*, pp. 147-188 (Springer-Verlag, 1980).